DOMINI DELL'INDAGINE MATEMATICA:
Algebra, Geometria, Analisi, Probabilità

Claudio GIORGI

1. Premessa
A partire dall'atteggiamento di domanda illustrato nella prima parte, si entrerà nello specifico dei domini matematici: algebra, geometria, analisi e probabilità. Cosa vuol dire acquisire ed insegnare una conoscenza critica di questi contenuti? Non basta insegnare le tecniche del ragionamento, le "regole" della procedura corretta, occorre formulare fin dentro questi aspetti specifici le domande di nesso e di senso, per comprendere "perché vale la pena di conoscere (e con una certa fatica) l'algebra, la geometria, l'analisi e la probabilità?".

2. Conoscenza critica ed unità del sapere
Innanzi tutto, la prima conquista di una conoscenza critica è l'unità del sapere. Nel caso della matematica, significa cogliere questi campi non come aspetti separati, ma come sfaccettature diverse del pensiero matematico. Che cosa li unisce? Il soggetto che li acquisisce, nella misura in cui è cosciente della propria soggettività ed è attento a cogliere ogni fattore della realtà in oggetto.
Spunti di approfondimento:
– Geometria sintetica (GS), geometria analitica (GA) e trigonometria (TR).
La seconda conquista della conoscenza critica è la consapevolezza dei modi e dei fini della disciplina. I "modi" si riferiscono non solo alle tecniche argomentative e dimostrative, ma al metodo stesso della disciplina. Quindi, la consapevolezza dei modi è la capacità di immedesimarsi, fare proprio tale metodo, non appena l'abilità di maneggiare le tecniche. Per questo non può essere disgiunta dalla consapevolezza dei fini, degli obiettivi della disciplina stessa.
Spunti di approfondimento:
– Insiemi con infiniti elementi: logica, analisi, probabilità

3. Primo approfondimento: la potente triade GS-GA-TR
Oggi il predominio della componente algebrica su quella geometrica è la principale causa della terribile noia della matematica nei curricula scolastici delle scuole superiori. E questo predominio è dovuto all'avvento del computer, che "mastica" il linguaggio algebrico e non quello geometrico. La geometria, invece, può essere rappresentata graficamente (almeno fino a tre dimensioni), consentendo all'occhio di contribuire al processo cognitivo in tre fasi: nella memorizzazione degli elementi del problema, nella individuazione della strategia dimostrativa, nell'interpretazione del risultato ottenuto al termine della procedura deduttiva. Molti problemi, algebrici e non, possono essere risolti "graficamente", anche mediante la rappresentazione grafica delle funzioni elementari e delle loro inverse. Esempi:
- equazioni e disequazioni,
- sistemi di equazioni e di disequazioni,
- problemi di probabilità (geometrica)
- problemi di programmazione lineare.

L'uso sistematico ed integrato degli strumenti propri della triade GS-GA-TR consente inoltre di dare una rappresentazione adeguata della realtà che ci circonda. Esempi:
- misure di strutture inaccessibili (altezza di una torre, lunghezza del meridiano terrestre)
- "cinematica" dei fenomeni fisici (rotolamento di un disco lungo un piano di inclinazione variabile)

4. Secondo approfondimento: ragionare sull'infinito
Le problematiche che nascono trattando gli insiemi con infiniti elementi sono scrupolosamente evitate nella scuola secondaria. Non per la loro complessità, quanto perché non ci sono formulette da

insegnare/imparare, ma solo concetti e ragionamenti: il principio di induzione ne è un esempio. Esso rappresenta uno strumento matematico potente per indagare ciò che si trova oltre i limiti del "contare" (limite dell'uomo e del computer allo stesso tempol), per aprire la ragione finita dell'uomo all'infinito.
Esempi:

- dimostrazione (per induzione) della formula di Gauss per la somma dei primi *n* interi;
- introduzione della probabilità geometrica quando lo spazio degli eventi non è numerabile.

Laddove emerge la sua dimensione non intuitiva (come nei problemi sull'infinto attuale), la matematica è per molti aspetti una scienza paradossale, dove "paradossale" non significa assurdo, irragionevole, ma indica qualcosa di ragionevole che però si colloca oltre l'orizzonte del senso comune. Qualcosa, insomma, che stimola la libertà della ragione ad andare oltre la regola. Alcuni esempi possono aiutare a cogliere il metodo con cui il "fare matematico" risolve le situazioni "paradossali".
Esempi:

- l'Hotel di Hilbert (a carattere numerico), gli indivisibili di Cavalieri (a carattere geometrico)
- *l'insostenibile densità del continuo*: l'intervallo (0,1) e la borsa di Mary Poppins.