

OLIMPIADI NAZIONALI DI MATEMATICA

CONFERENZE PER STUDENTI E DOCENTI

Cesenatico, 9 maggio 2009

***Avventure giroscopiche:
ruote, trottole e pietre celtiche***

Claudio Giorgi

*Dipartimento di Matematica
Università di Brescia*

PREMESSA

1) **Matematica e conoscenza**

Matematica: dal greco μαθημα (*máthema*):

"scienza", "conoscenza" o "apprendimento".

Da cui μαθηματικός (*mathematikós*):

"**desideroso di apprendere**".

«Non si fanno esperienze senza porre domande»

(H.G. Gadamer, Verità e metodo)

Il processo della comprensione umana ha nel *domandare* il suo baricentro. Farsi delle domande, infatti, è il principio del sapere umano. Non vi è conoscenza senza il **desiderio di apprendere**.

Il fatto stesso di domandare implica che, di principio, **una qualche risposta sia possibile**, altrimenti il domandare sarebbe un atto intrinsecamente insensato; ed essendo il domandare principio del sapere, conseguirebbe che tutto il sapere sarebbe un'impresa insensata.

Il domandare umano implica una previa e costitutiva fiducia della ragione nell'intelligibilità della realtà.

Lo stupore del conoscere nasce dalla **misteriosa corrispondenza** tra gli strumenti a nostra disposizione (come la matematica) e la realtà che ci circonda.

La conoscenza, anche quella matematica, è sollecitata dall'esperienza, quindi è un'*avventura*.

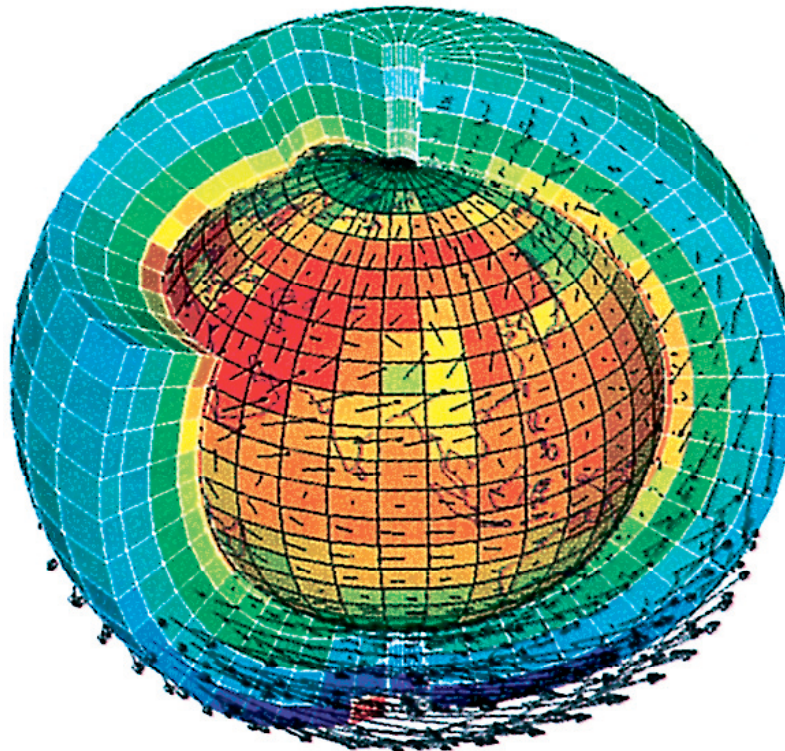
2) **Matematica applicata = M^2**

Matematica applicata = **Metodi e Modelli** per la rappresentazione, comprensione e simulazione di **fenomeni complessi**. Semplici esempi ben noti:

- La rappresentazione cartesiana dello spazio,
- Le equazioni della dinamica newtoniana,
- I metodi dell'ottica geometrica,
-

Più i fenomeni sono **complessi**, più diventa inevitabile l'utilizzo di **strumenti matematici**: l'intuizione non basta a dare risposte alle domande. Esempi (<http://umi.dm.unibo.it/>)

- GEOMETRIA A 11 DIMENSIONI PER COMPRENDERE LA GENESI DELL'UNIVERSO;
- COMPRESIONE DI IMMAGINI;
- MODELLI MOLECOLARI E BIOLOGICI;
- MODELLI DI PREVISIONE DEL CLIMA



MODELLO DI PREVISIONE DEL CLIMA (da "L'esplosione della Matematica")

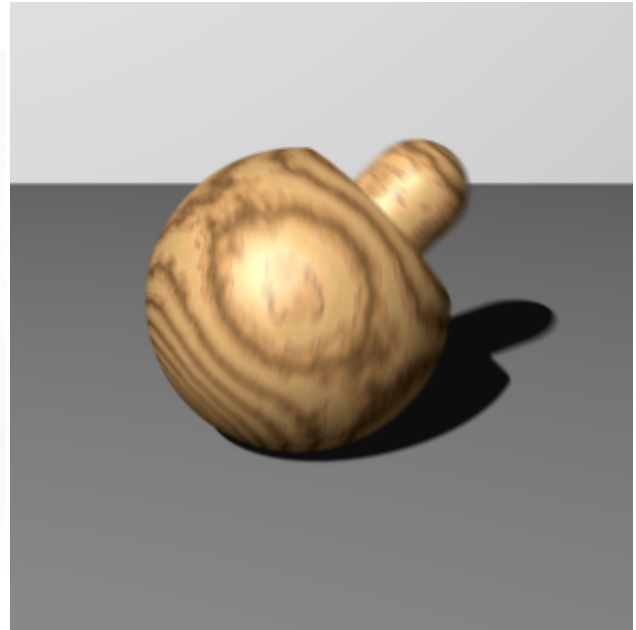
**3) Fenomeni giroscopici in presenza di attrito:
*un'avventura della conoscenza***



CASEY STONER SUL CIRCUITO DI MOTEGI (2009)



“RATTLEBACK” (L’OSTINATO)
discendente delle pietre celtiche



TROTTOLE “TIPPE TOP”



PAULI E BOHR OSSERVANO UNA “TIPPE TOP”
(University of Lund, 31 maggio 1951)

INTRODUZIONE AI FENOMENI GIROSCOPICI

- *Particella di massa m*

$$\mathbf{Q} = m \mathbf{v} \quad \text{Quantità di moto}$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Q} = m \mathbf{a} = \mathbf{F} \quad \text{Seconda Legge di Newton}$$



$$m \mathbf{a} \times (\text{O-P}) = \mathbf{F} \times (\text{O-P})$$

$$\mathbf{K}_O = m \mathbf{v} \times (\text{O-P}) \quad \text{Momento della quantità di moto}$$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{F} \times (\text{O-P}) \quad \text{Momento della forza}$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}_O = \mathbf{M}_O$$

- *Corpo rigido con asse fisso (rotore)*

$$\mathbf{K}_O = I \boldsymbol{\omega}$$

I Momento di inerzia (scalare)

$\boldsymbol{\omega}$ Velocità angolare (vettore)

$$I \frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_O$$

- *Caso elementare ed intuitivo: \mathbf{F} e \mathbf{v} (\mathbf{M}_O e $\boldsymbol{\omega}$) allineati*

L'azione di \mathbf{F} (\mathbf{M}_O) non modifica la direzione di \mathbf{v} ($\boldsymbol{\omega}$)

Esempi: Moto rettilineo del punto,
Moto rotatorio di una giostra.

- *Caso meno intuitivo: \mathbf{F} e \mathbf{v} (\mathbf{M}_O e $\boldsymbol{\omega}$) perpendicolari*

1 - L'azione di \mathbf{F} **modifica** la direzione di \mathbf{v}

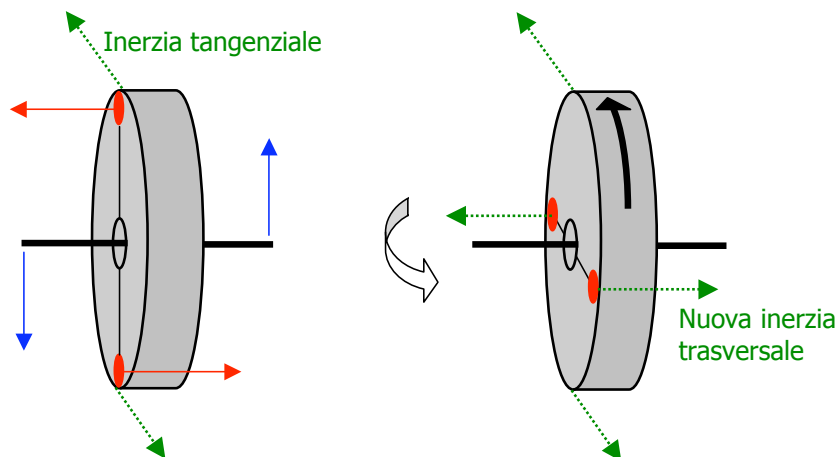
Esempio: Moto circolare, \mathbf{F} = *forza centripeta*,

Un punto materiale che segua una traiettoria circolare è costantemente accelerato verso il centro; la forza che agisce si chiama centripeta.

2 - L'azione di \mathbf{M}_O **modifica** la direzione di $\boldsymbol{\omega}$

Esempio: Moto rotatorio uniforme di un giroscopio
(rotore con simmetria assiale)

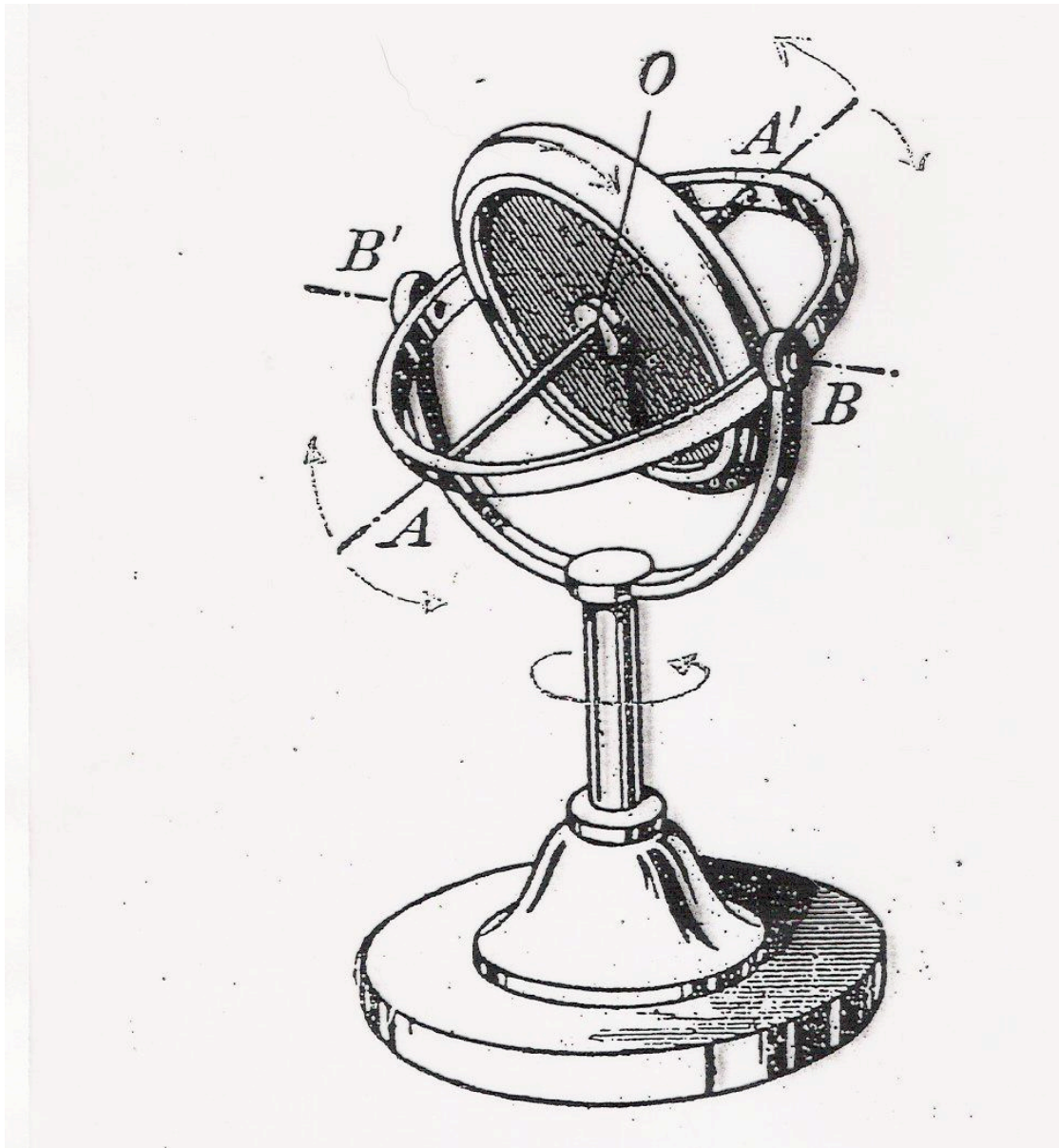
\mathbf{M}_O = *coppia di rotazione dell'asse (in blu)*



Roberto Weitnauer (2005) www.kalidoxa.com

Effetto prodotto dalla coppia \mathbf{M}_O sul rotore:

- in condizioni statiche = **coppia rossa** (a sinistra),
- in condizioni dinamiche = *freccia piena* (a destra)



GIROSCOPIO SU UNA SOSPENSIONE CARDANICA

Il giroscopio è un rotore a forma di toroide che ruota intorno al suo asse di simmetria (AA' in figura).

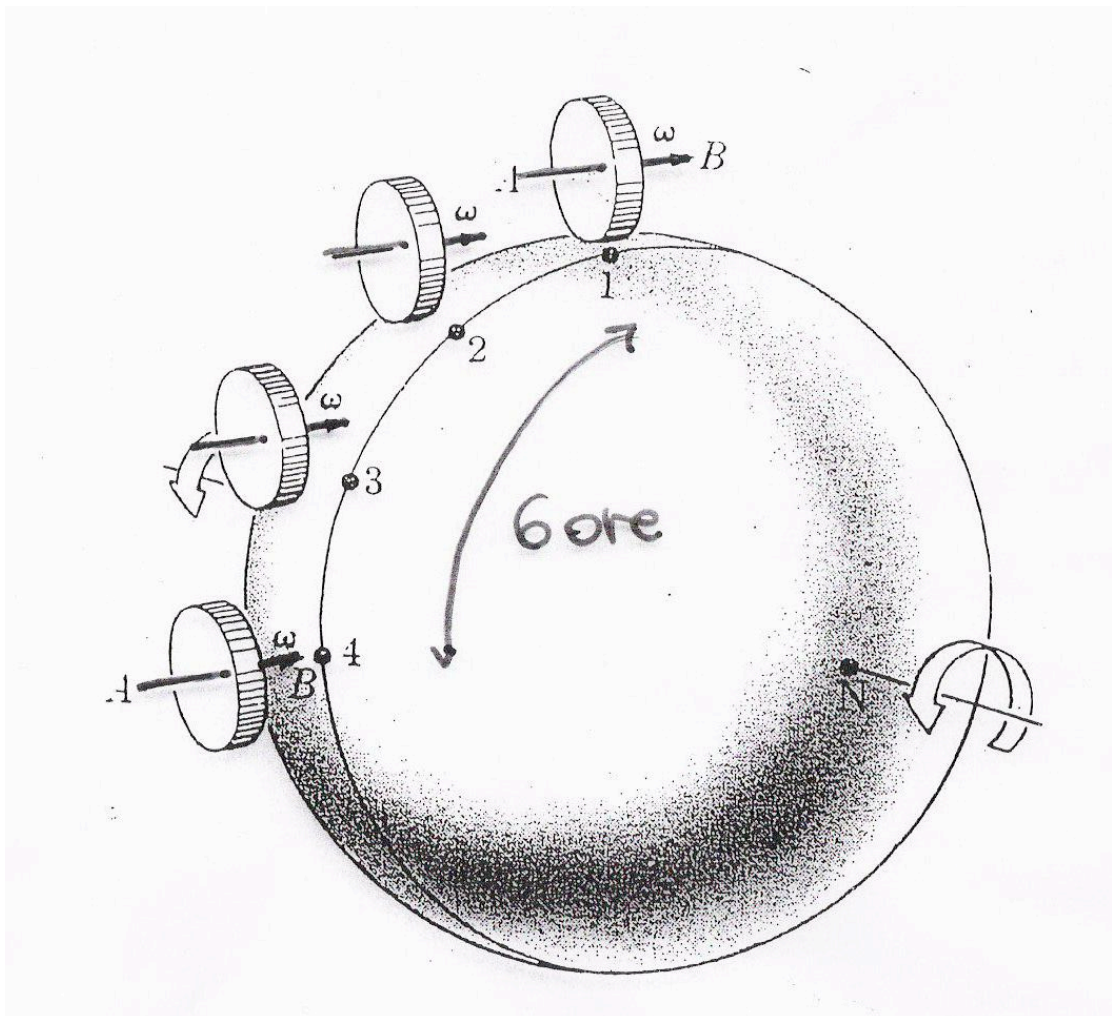
Quando il giroscopio è in rotazione attorno a tale asse, questo tende a **mantenersi parallelo a sé stesso** e ad **opporsi ad ogni tentativo di cambiare il suo orientamento** (**tenacia dell'asse giroscopico**).

Un giroscopio mostra anche altri fenomeni caratteristici, tra cui la **precessione** e la **nutazione**.

TENACIA DELL'ASSE GIROSCOPICO

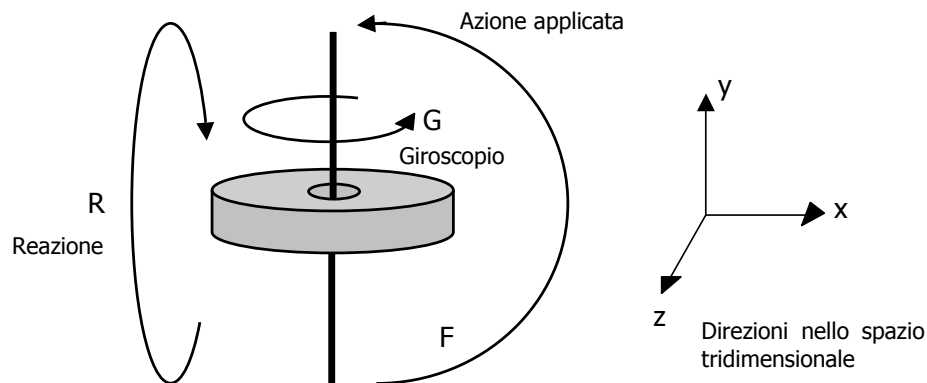
Il giroscopio fu inventato nel 1852 dal fisico *Jean Bernard Léon Foucault* nell'ambito dei suoi studi sulla rotazione terrestre.

Se un giroscopio è installato su una sospensione cardanica che gli permette di orientarsi liberamente nelle tre direzioni dello spazio, **il suo asse si manterrà orientato nella stessa direzione anche se il supporto cambia orientamento.**



Tenacia del giroscopio durante il moto diurno terrestre

PRECESSIONE DELL'ASSE DI ROTAZIONE



Roberto Weitnauer (2005) www.kalidoxa.com

L'applicazione della **coppia** F al giroscopio rotante attorno ad un asse verticale produce la **rotazione** R **dell'asse di rotazione**.

La prima rotazione (G) è quella che contraddistingue il rotore del giroscopio;

l'asse di rotazione è verticale e complanare al foglio (asse y).

La seconda rotazione (F), perpendicolare alla prima, corrisponde all'applicazione di una coppia volta a piegare l'asse medesimo del giroscopio;

l'asse di tale rotazione è perpendicolare al foglio (asse z).

*Il giroscopio è soggetto a una **coppia** complanare al foglio che gira in senso antiorario.*

Infine, il terzo movimento rotatorio (R) è perpendicolare a entrambi i precedenti ed è quello che effettivamente (e poco intuitivamente) segue il giroscopio per reazione;

*l'asse di tale rotazione è orizzontale (asse x), quindi **l'asse del giroscopio tende ad uscire dal foglio**.*

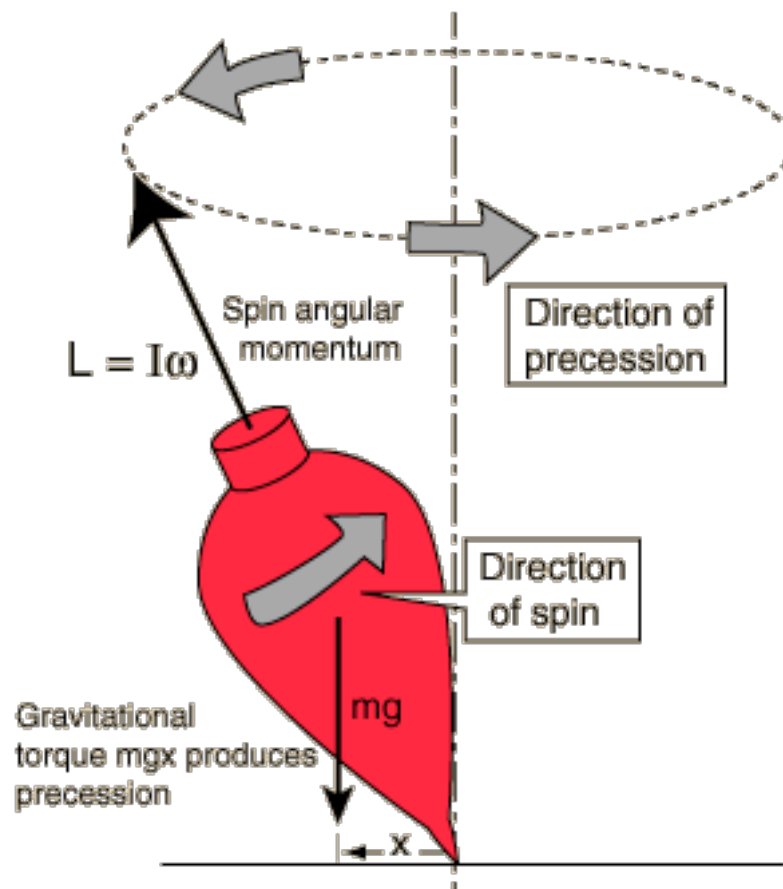
*Viceversa, se l'azione applicata produce la rotazione (R) attorno all'asse x , allora la reazione del giroscopio è diretta lungo l'asse z , come (F), ma, per una nota proprietà del prodotto vettoriale, **orientata in verso opposto**.*

LA TROTTOLA

La precessione è il tipico movimento che hanno le **trottole**.

*Qual è in tal caso la **forza deflettente** F applicata all'asse della trottola?*

Semplice, è la componente della **gravità**, a patto che la trottola non parta in posizione perfettamente verticale.



La **forma** della trottola deve essere tale da restare a contatto col suolo **sempre nello stesso punto**: in genere, le trottole sono a forma di **cono** nella parte inferiore.

Forme diverse producono movimenti diversi (ad es. “tippe top”).

RUOTE COME GIROSCOPI

Illustrazioni tratte da:

Roberto Weitnauer (2005)

www.kalidoxa.com/

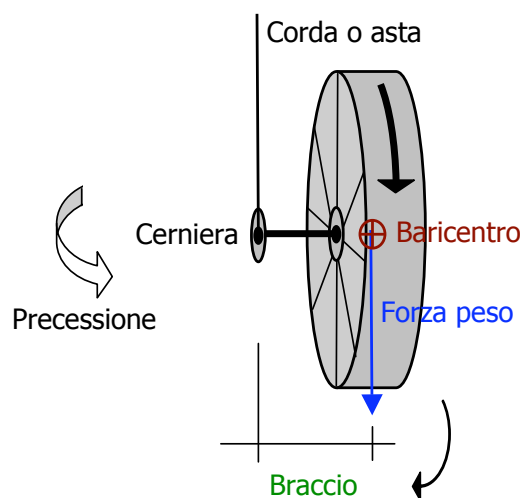
Vittore Cossalter

www.dinamoto.it/DINAMOTO/on-line_papers/effetto_giroscopico/Effettigiroscofici.html

Possiamo sperimentare l'effetto giroscopico in prima persona. Se con le mani teniamo una **ruota** smontata da una bicicletta per il mozzo mentre gira velocemente, ci accorgiamo subito di una circostanza caratteristica: dobbiamo compiere **un certo sforzo per spostare l'asse di rotazione** in qualunque direzione, mentre **non costa alcuna fatica traslarlo parallelamente** a sé stesso.

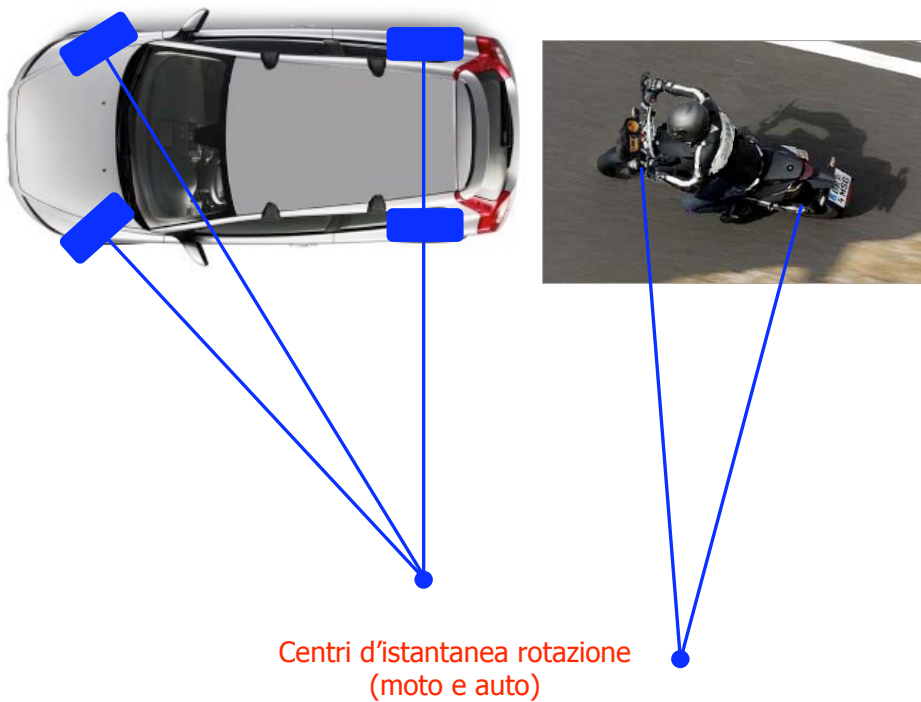
La ruota in movimento, come un giroscopio, tende a non modificare il suo orientamento nello spazio.

Inoltre, se poniamo la ruota in rotazione, appendendola lateralmente per il mozzo mediante una corda e facendo in modo che si mantenga verticale rispetto al pavimento, assistiamo ad un **moto di precessione** che fa girare la ruota intorno alla corda, come illustrato nella figura qui sotto.



QUANTE RUOTE?

La dinamica di un veicolo, cioè di un sistema dotato di ruote, è molto differente a seconda del **numero** e della **disposizione delle ruote**, ma anche in relazione alla **velocità** del veicolo stesso.



Quando una **moto** procede lentamente nelle manovre strette, gira come un'automobile, ossia *il conducente cambia orientamento alla ruota anteriore, agendo sul manubrio*.

L'effetto giroscopico è in questo caso molto lieve, dato che la ruota gira lentamente. Anche la **piega laterale** (rollio) è limitata, quindi le gomme lavorano quasi dritte.

In questo modo la curva viene effettuata per via della **traccia battuta dal pneumatico anteriore** che, insieme a quello posteriore, determina un certo **centro di istantanea rotazione** e quindi un certo raggio di curvatura nella manovra.

A causa di ciò, le ruote anteriori dell'auto *non rimangono tra loro parallele* durante la manovra **in curva**, ma *convergono*.

ANALISI DEL COMPORTAMENTO DI UN (MOTO)CICLO

Il **controllo** dell'assetto di un veicolo a due ruote, e quindi la sua guida, è un processo estremamente complicato.

Sulla dinamica della **bicicletta**, ed ancor più su quella della **motocicletta**, influiscono diversi effetti giroscopici:

- * **tenacia dell'asse giroscopico**: effetto giroscopico generato dalla rotazione delle ruote attorno al mozzo nel moto rettilineo;

- * **effetto giroscopico di rollio**: effetto giroscopico generato dalla rotazione delle ruote, durante il moto di rollio del motociclo, attorno all'asse che passa per le impronte dei due pneumatici;

- * **effetto giroscopico di imbardata**: effetto giroscopico generato dalla rotazione delle ruote, nel moto stazionario in curva;

- * **effetto giroscopico di sterzata**: effetto giroscopico generato dalla rotazione della ruota anteriore, durante una sterzata.

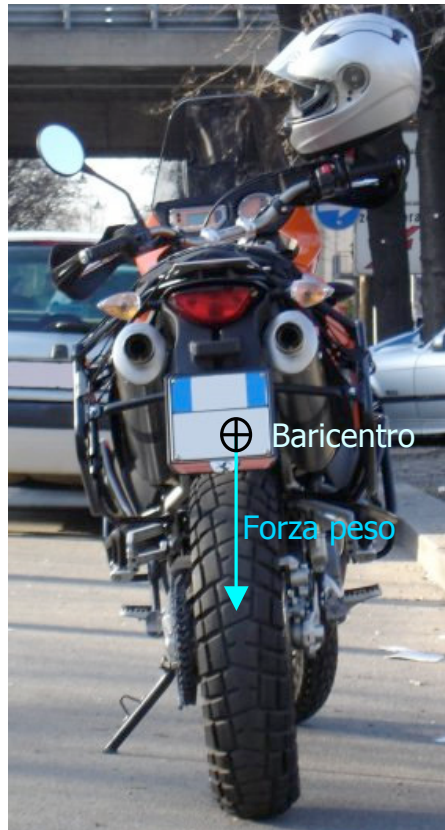
Tali effetti aumentano quanto più le **ruote** sono **grandi** e di **massa elevata** e, inoltre, quanto più **celermente ruotano** intorno ai rispettivi mozzi.

A **velocità molte basse**, praticamente quando si procede a "*passo d'uomo*", gli effetti giroscopici sono invece **trascurabili** sulle moto, ed in particolare sulle biciclette.

Per questo motivo è difficile **restare in equilibrio** su una bici che procede lentamente: la posizione eretta può essere mantenuta **agendo sul manubrio** e controllando la posizione del corpo (come nella tecnica del "*surplace*").

1. Tenacia dell'asse giroscopico.

Un motoveicolo fermo **non può stare in equilibrio**, mentre questa è la norma se esso si sposta su strada.



La **stabilità** del veicolo a due ruote durante la marcia è data proprio **dall'effetto giroscopico**. Le **ruote** sono insomma come dei **giroscopi** che conservano il loro orientamento e che difficilmente si fanno condizionare da sollecitazioni esterne.

Ovviamente, la stabilità sarà in questi termini tanto più garantita quanto più elevata è **la velocità di rotazione delle ruote**.

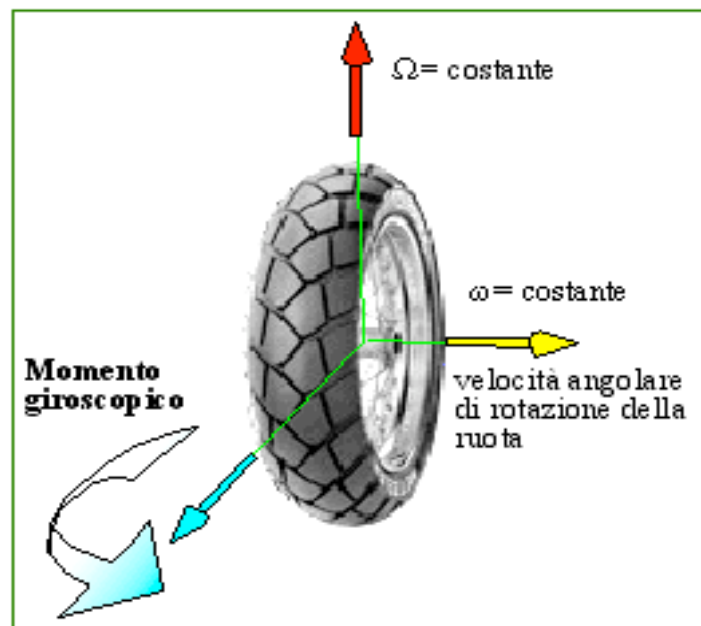
Il rovescio della medaglia è che ruote grandi e pesanti, o una elevata velocità, richiedono **maggiore sforzo per cambiare direzione di marcia**. L'effetto giroscopico, infatti, tende a mantenere l'asse delle ruote parallelo a sé stesso.

2. La “piega” in curva.

Supponiamo di dover girare a destra con la moto al termine di un rettilineo.

Se affrontassimo la curva come se fossimo su un triciclo, cioè ruotando il manubrio **in senso orario attorno ad un asse verticale**, il momento giroscopico che si verrebbe a creare, assieme all’inerzia, produrrebbero **l’effetto di rovesciare la moto sul lato opposto!**

Se invece ruotiamo lentamente il manubrio **in senso orario attorno ad un asse orizzontale**, il momento giroscopico produce una rotazione dell’asse della ruota nel verso della curva. Tale manovra, **non intuitiva**, diventa **istintiva** con la pratica.



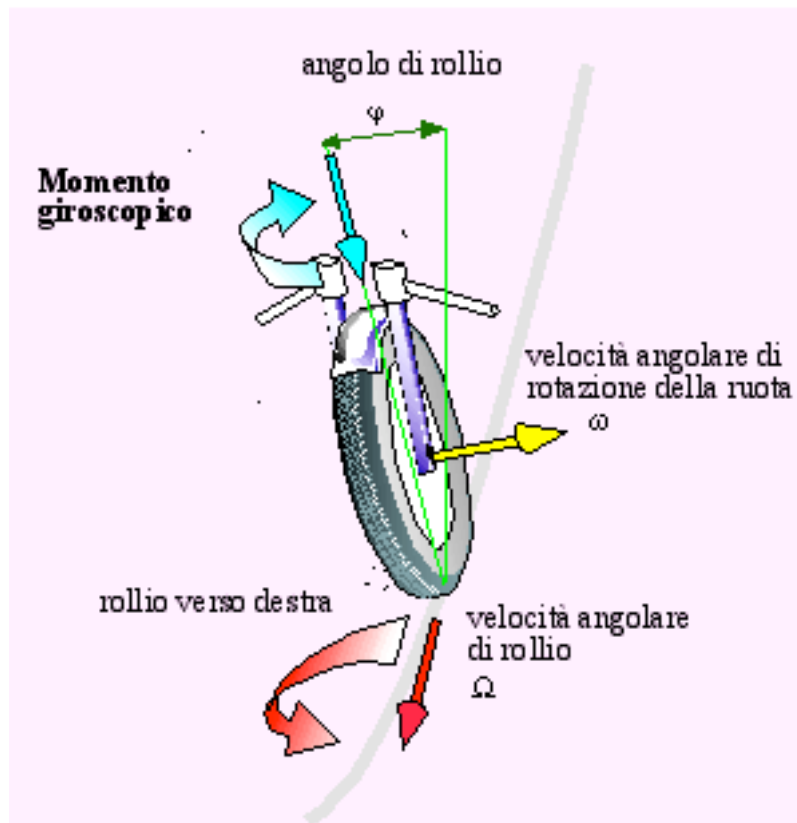
Gli **effetti di rollio, di imbardata e di sterzata** di cui parleremo nel seguito, nascono quando la ruota dotata di moto di rotazione attorno al proprio asse, con velocità angolare ω , è posta in rotazione anche **attorno ad un secondo asse**, perpendicolare al precedente, con velocità angolare Ω .

3. Il rollio.

Il *rollio* è un effetto giroscopico sullo sterzo (ruota anteriore) che *si verifica quando si inclina la moto di lato*.

Inclinando lateralmente l'asse di rotazione della ruota, come di consueto in una piega, si determina la comparsa di un momento giroscopico che tende a *chiudere il manubrio*, cioè a puntare la *ruota verso l'interno della curva* la cui percorrenza viene quindi facilitata.

L'inclinazione della piega è detta *angolo di rollio*.



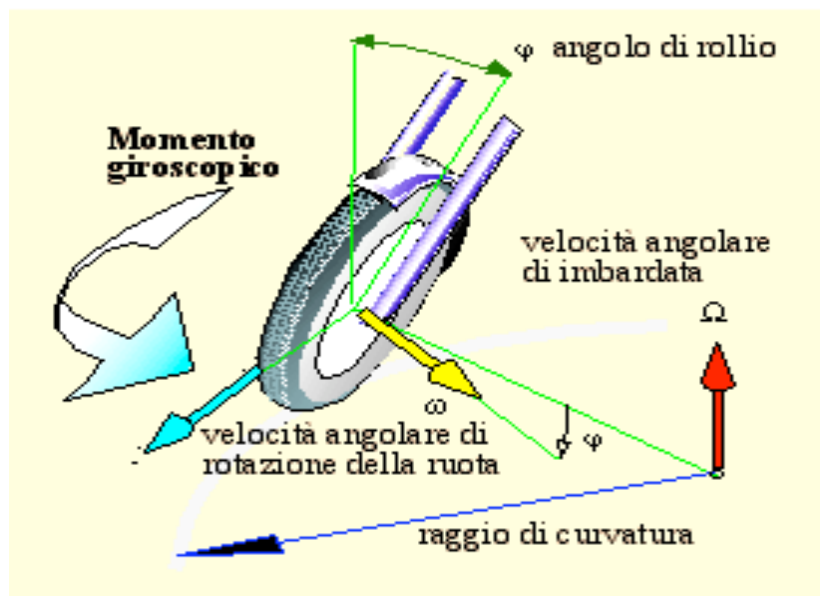
Se il *manubrio viene tenuto fermo* dal pilota, l'effetto si scarica sull'intero motociclo, inducendolo a *imbardarsi*, cioè a torcersi (visto in pianta) per seguire la curva (ma con pneumatici dritti). Quando il peso laterale diminuisce e quindi cala la piega, anche l'effetto giroscopico di rollio si affievolisce.

4. L'imbardata.

E' in pratica la curva vista dall'alto. La rotazione impressa, in verde, produce per effetto giroscopico la rotazione in rosso.



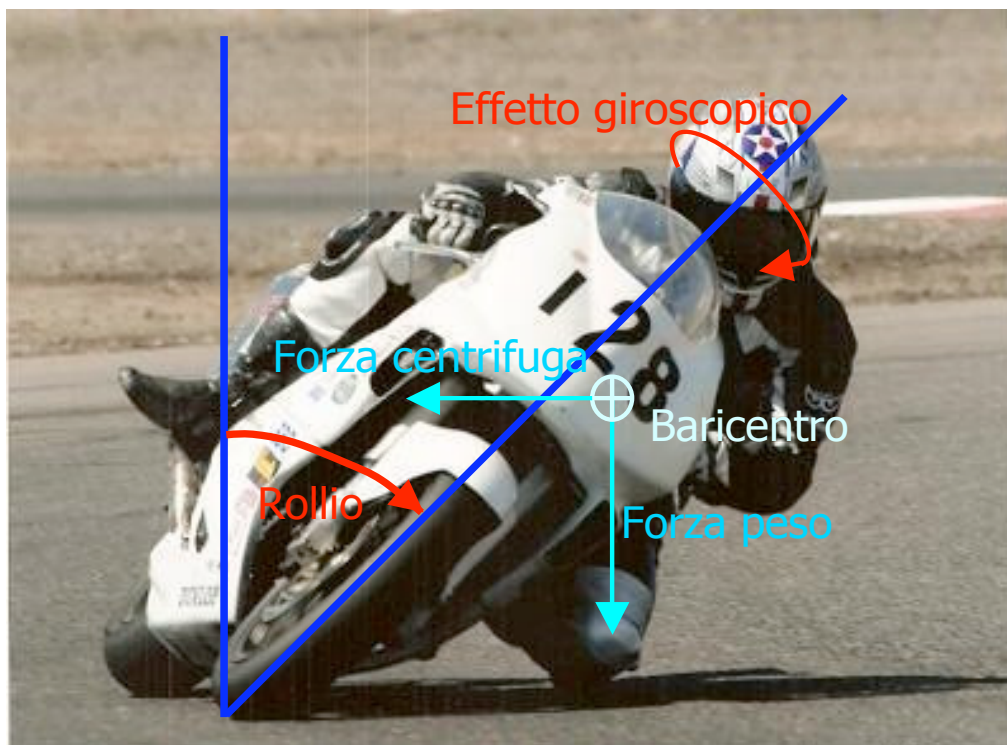
Mentre si percorre una curva l'asse delle ruote non mantiene il suo orientamento: visto in pianta, esso punta sempre verso l'interno della curva e quindi si torce perché, diversamente da un giroscopio libero, esso è *vincolato dal contatto dei pneumatici sul terreno*.



L'*imbardata* induce una reazione giroscopica che **tende a raddrizzare il motociclo dalla sua posizione di piega in curva.**

Ciò significa che la posizione d'equilibrio dinamico del veicolo non è data dalla sola **inerzia** e dal **peso** applicati nel baricentro, ma anche dal **momento giroscopico**. Il motociclo deve inclinarsi di un'angolazione aggiuntiva per compensare anche tale momento.

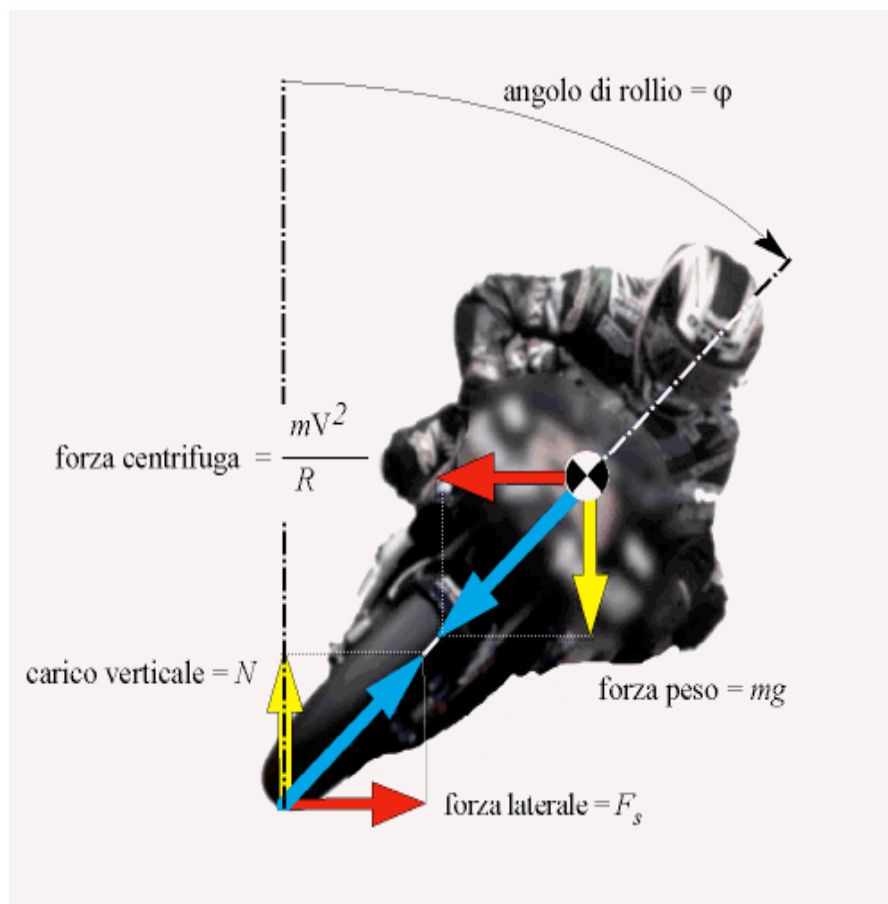
L'**angolo addizionale d'inclinazione** richiesto è *tanto maggiore quanto più elevata è la velocità, quanto più stretta è la curva e quanto più pesanti e grandi sono le ruote.*



A causa della limitata aderenza dei pneumatici, il pilota non sempre può fornire questa **inclinazione addizionale** alla moto, quindi spesso cambia posizione in curva per **abbassare il più possibile il baricentro** dove sono applicate la forza peso e la forza centrifuga.



Esempio di “piega” con baricentro abbassato.



Equilibrio delle forze trascurando l'effetto giroscopico.

5. La sterzata.

Come già detto, se pieghiamo lateralmente la motocicletta la ruota anteriore *sterza* in seguito alla reazione dell'effetto giroscopico.

Ma che cosa succede se **siamo noi a sterzare leggermente** durante la curva?



Sterzando verso destra (spingendo quindi in avanti la parte sinistra del manubrio o tirando verso di noi quella destra) **la moto piega a sinistra**. Viceversa, **se si sterza lievemente verso sinistra la motocicletta piega a destra** (vedi figura).



Ciò è esattamente il contrario di quanto ci si aspetterebbe.

In particolare questo espediente viene usato per cambiare (allargare o stringere) la traiettoria o “rialzare” la moto quando si sta per perdere l’aderenza in curva.

Molti motociclisti conoscono questa condizione per esperienza ed operano in maniera più o meno istintiva. Si tratta di una manovra rischiosa che non sempre riesce.



LORENZO CADE A JERES DE LA FRONTERA

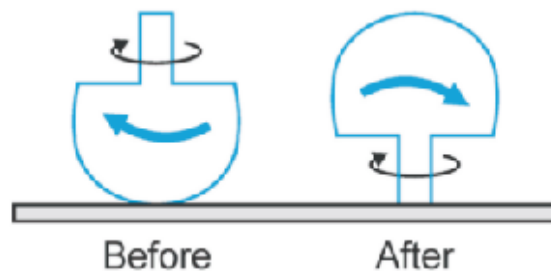
TROTTOLE IMPAZZITE

Illustrazioni tratte da:

<http://www.fysikbasen.dk/English.php?page=Vis&id=79>

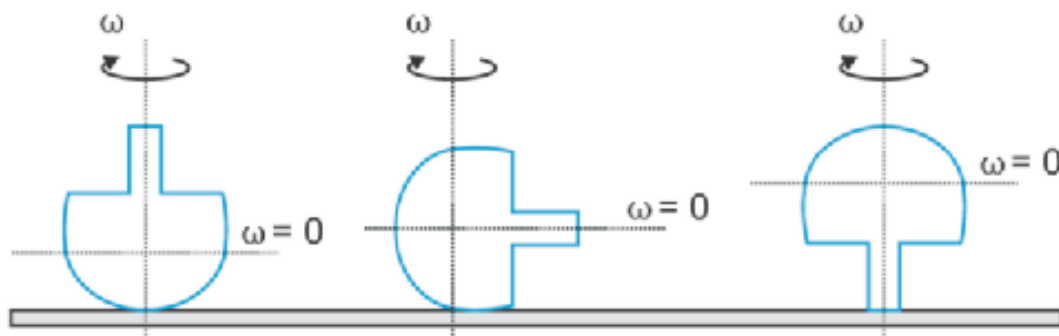
Si chiama "**Tippe Top**" ed è un particolare tipo di trottola dalla forma caratteristica: **sferica**, anziché **conica** nella parte inferiore.

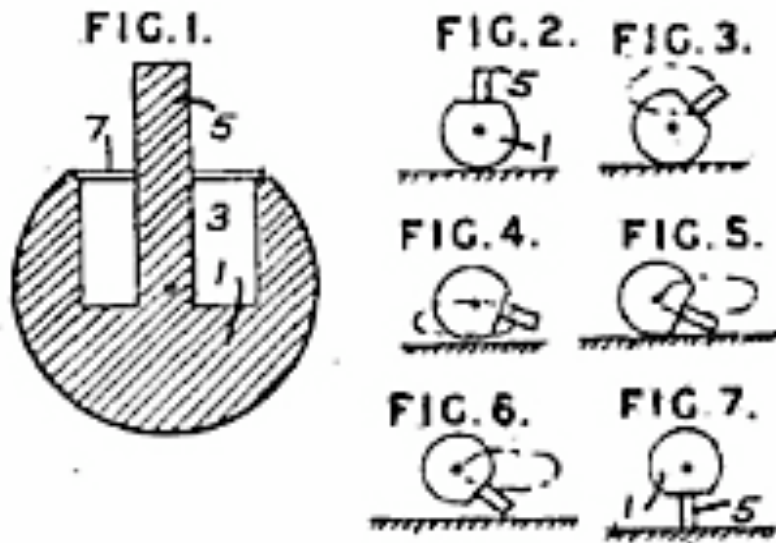
Se posta in *rapida rotazione* attorno al proprio asse giroscopico, inizialmente si muove come una comune trottola, mostrando una *precessione* del proprio asse rispetto alla verticale. Allo stesso tempo, però, l'angolo di *nutazione* (= angolo tra l'asse della trottola e la verticale) aumenta progressivamente, fino a che l'asse giroscopico non ha compiuto una rotazione di 180° e **la trottola finisce per rovesciarsi** e ruotare sul proprio manico.



Alla fine della sua inversione, la trottola tippe top ha aumentato la propria **energia potenziale**, avendo portato il proprio **baricentro G ad una quota più alta** di quella iniziale. Ma non ha incrementato la propria energia totale.

Infatti, nello stesso tempo, *ha perduto energia cinetica*. Una parte, persa a causa della dissipazione per attrito. Un'altra parte, invece, è stata spesa per innalzare il baricentro.



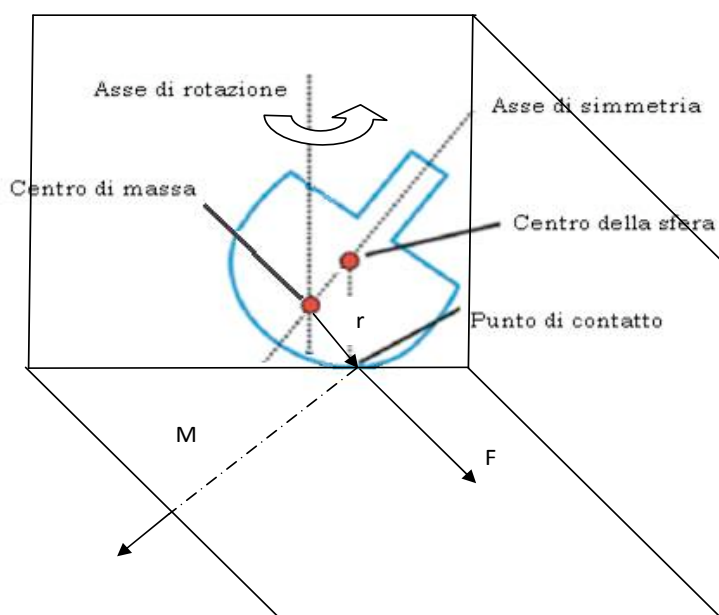


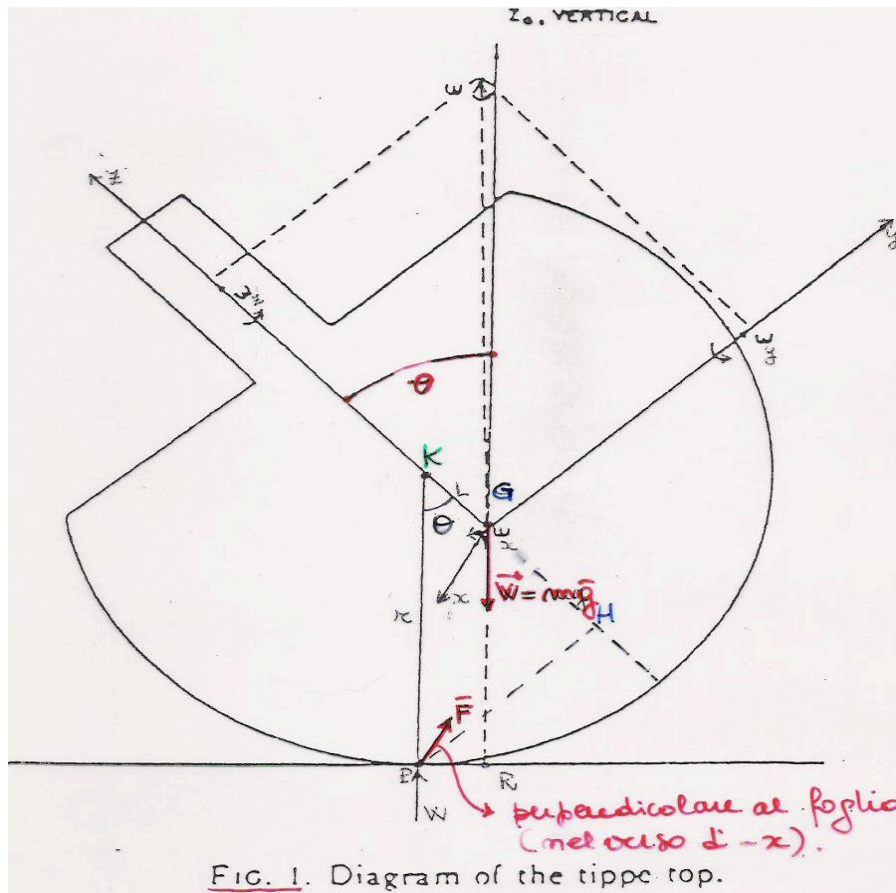
Ma come avviene questo fenomeno?

La spiegazione richiede l'uso di strumenti fisico-matematici sofisticati: si veda ad esempio il recente articolo

N.M. Bou-Rabee, J.E. Marsden, and L.A. Romero,
Tippe top inversion as a dissipation-induced instability,
 SIAM J. Appl. Dyn. Sys. 3, 352 (2004)

L'inversione dell'asse di simmetria (e quindi l'incremento di energia potenziale) è dovuto all'effetto giroscopico prodotto dal momento M della forza d'attrito F rispetto al centro di massa.



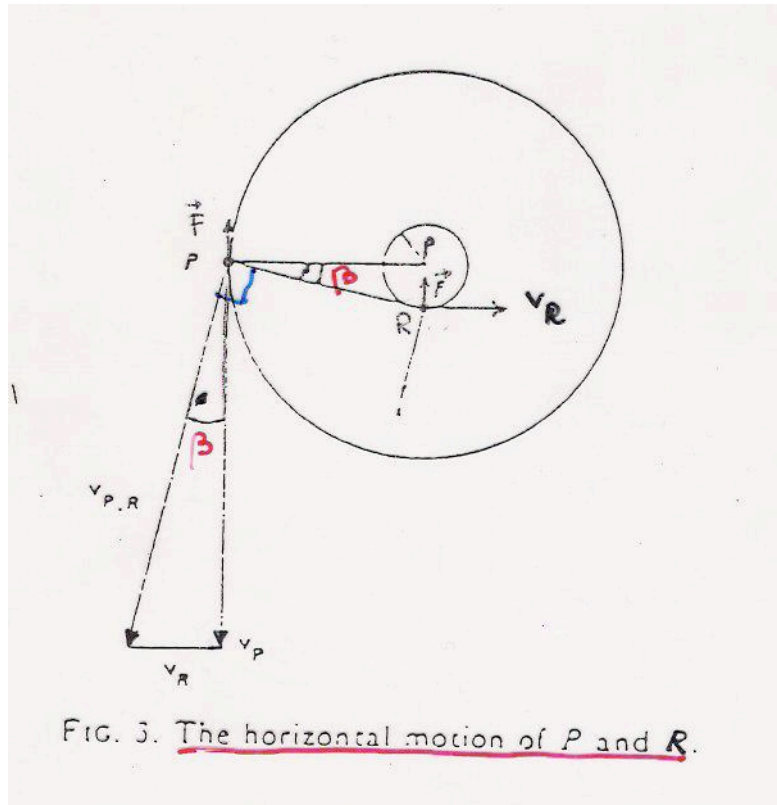


La dinamica della trottola “tippe top” è determinata da **due effetti giroscopici**:

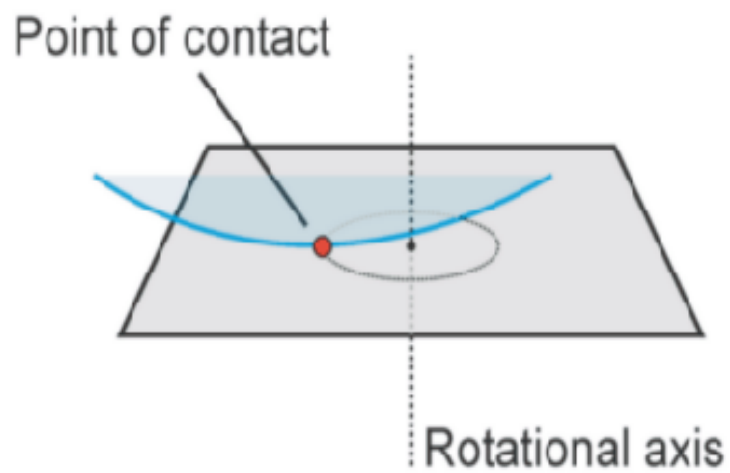
- quello prodotto dal momento della **forza peso** W rispetto al centro K della sfera, che genera il **moto di precessione**,
- quello prodotto dalla **forza d'attrito** F rispetto al centro di massa G , che genera il **ribaltamento dell'asse giroscopico**.

Il modello matematico contiene **diverse approssimazioni**. Si suppone infatti che:

- l'**asse di istantanea rotazione** (linea tratteggiata), e quindi la **velocità angolare** ω , siano **verticali**;
- il **punto di contatto** P descriva un **moto circolare** attorno a R , piede dell'asse di rotazione;
- la **direzione della forza d'attrito** F sia **perpendicolare** al segmento PR .



TRAIETTORIE DEI PUNTI P ED R DURANTE IL MOTO DELLA TROTTOLA



APPROSSIMAZIONE DEL MOTO DEL PUNTO P ATTORNO AD R ($\beta=0$)

PIETRE CELTICHE



Le pietre celtiche sono oggetti a forma di barchetta la cui dinamica rotazionale presenta evidenti anomalie.



“CELT STONE” o PIETRA CELTICA (Testa d’ascia, Oklahoma)

Alcune pietre con queste caratteristiche sono state rinvenute in siti archeologici primitivi in Inghilterra e negli USA.

A.D. Moore (Michigan University) ha studiato a fondo questi oggetti e li ha chiamati **RATTLBACK**.

Il doppio effetto dell'attrito

Osservazioni tratte da:
<http://www.123too.com/>



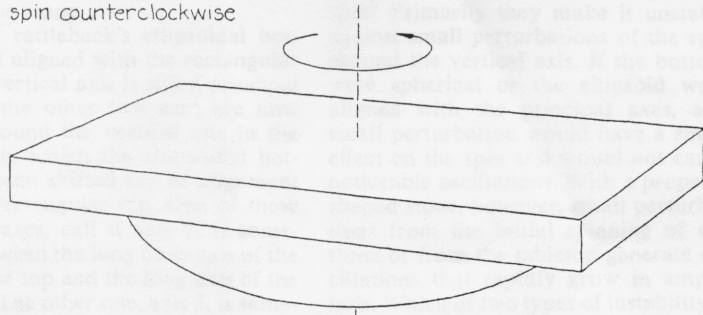
Se appoggiamo uno di questi oggetti su un piano levigato (ad esempio una lastra di vetro) e lo poniamo in **rotazione in un dato senso**, tutto procede secondo le attese. **Per effetto dell'attrito**, pur minimo, dopo alcuni giri la pietra perde velocità e si ferma.

Proviamo ora a porla in **rotazione in senso opposto**. Dopo alcuni giri "regolari", la pietra comincia a **oscillare "basculando"** verticalmente, poi inaspettatamente ***inverte il senso di rotazione***.

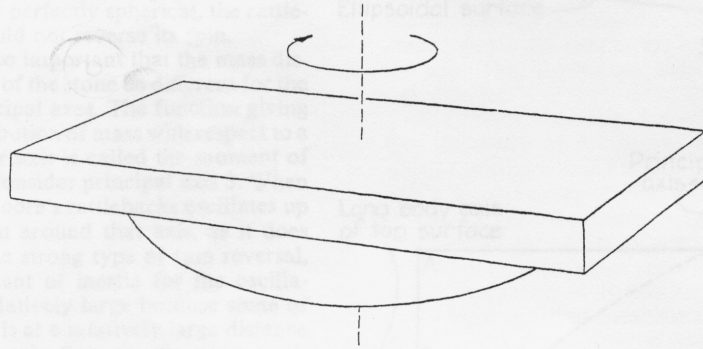
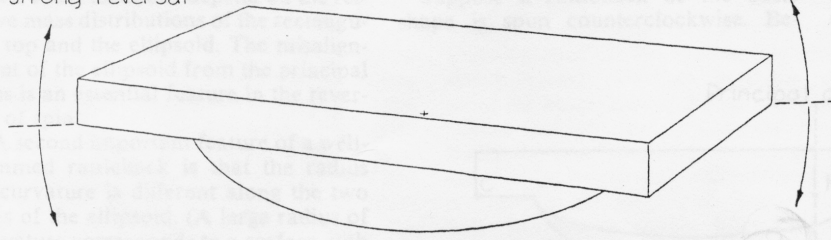
Viceversa, se la facciamo oscillare "basculando" attorno ad un asse orizzontale, la pietra dopo pochi istanti si ferma ed inizia a ruotare attorno all'asse verticale.

In entrambi i casi, a causa della *specifiche geometria non perfettamente simmetrica*, i momenti della **forza di attrito e della **forza di gravità** consentono di **trasferire il momento della quantità di moto da un asse ad un altro**.**

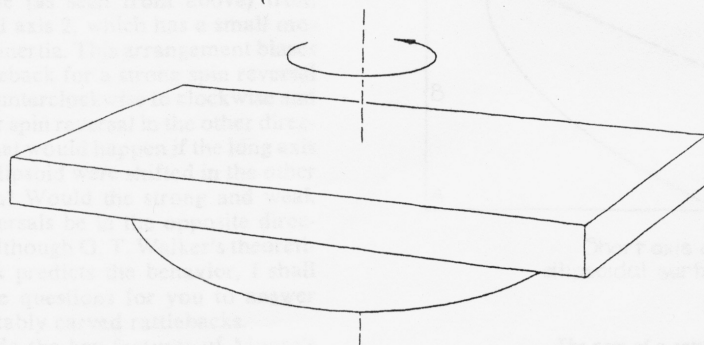
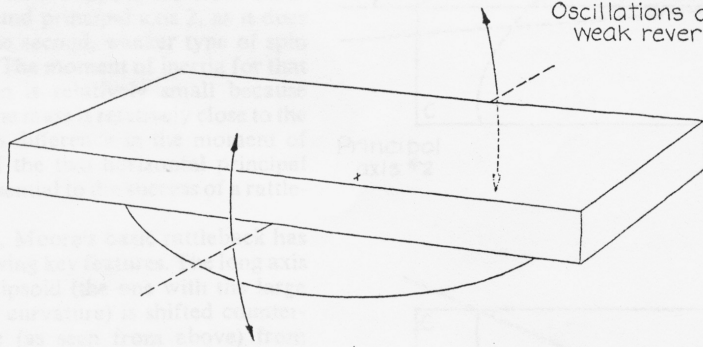
Initial spin counterclockwise



Oscillations during strong reversal



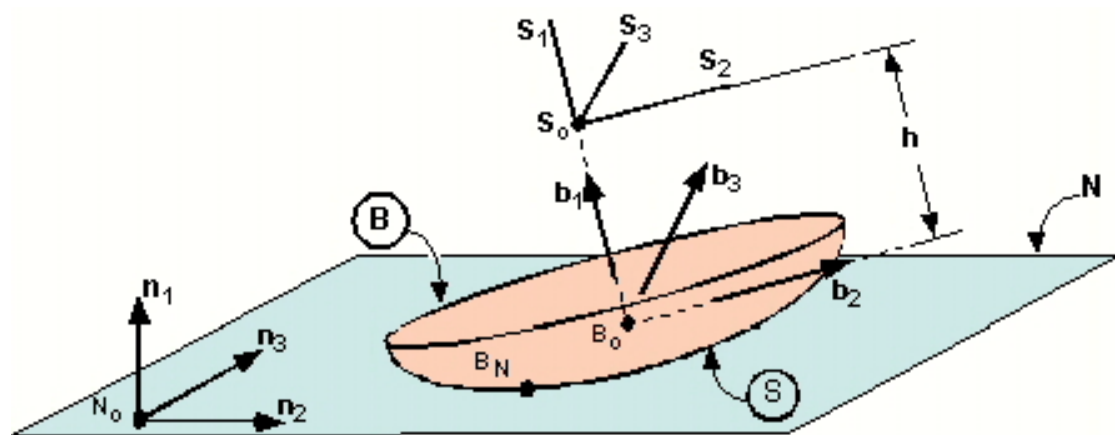
Oscillations during weak reversal



A rattleback that exhibits a strong reversal and a weak one

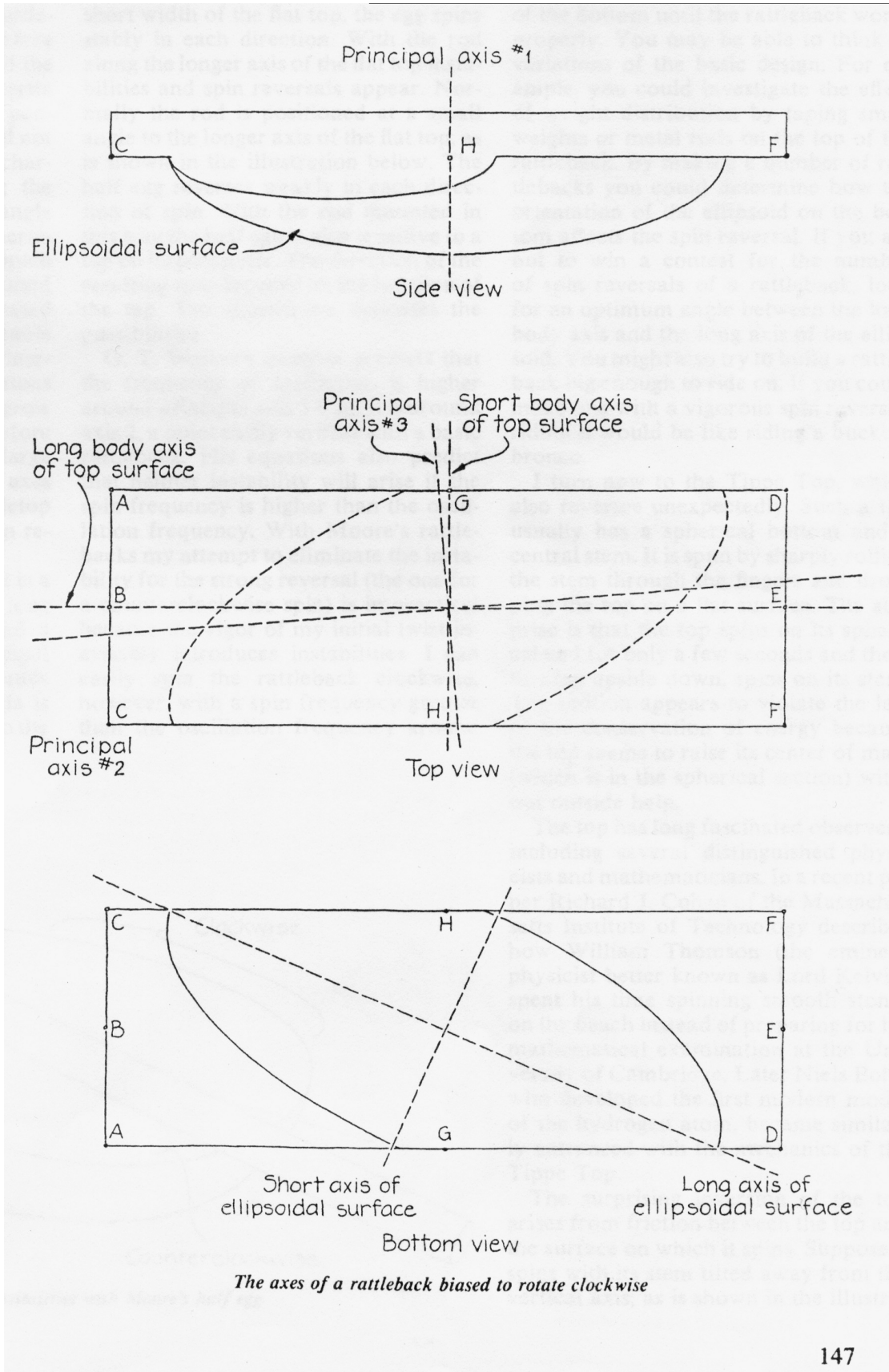
La spiegazione di questo comportamento risiede nel fatto che la pur essendo **la forma perfettamente simmetrica**, **la distribuzione delle masse** nella sezione di queste pietre **non è simmetrica**.

Ce ne possiamo accorgere perché quando sono poste sul piano, *le pietre celtiche sono leggermente inclinate da un lato*.

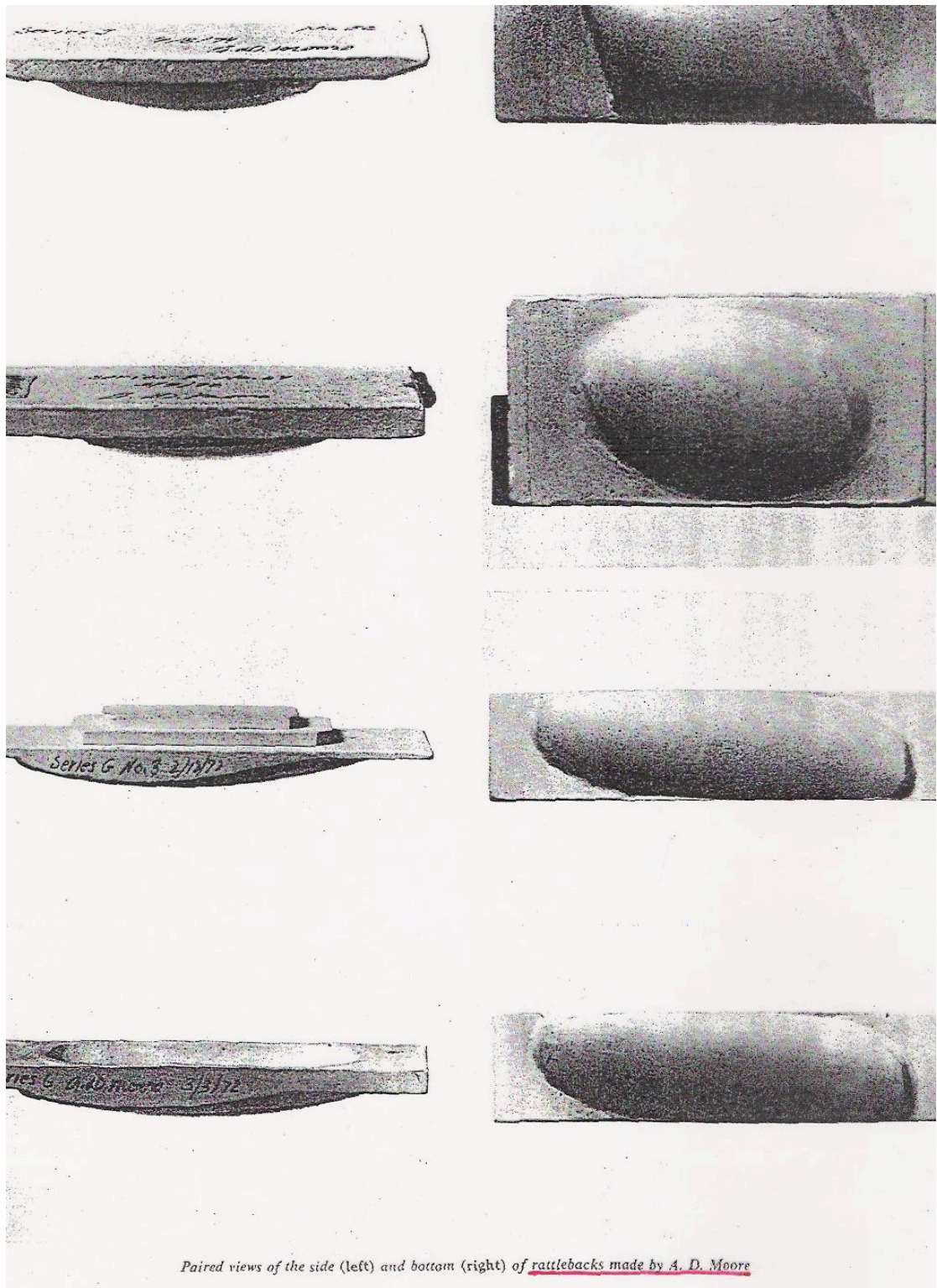


S	Superficie ellissoidale
B_N	Punto di contatto col piano N
B_0	Centro di massa
S_0	Centro dell'ellissoide
S_1, S_2, S_3	Assi dell'ellissoide
b_1, b_2, b_3	Versori degli assi dell'ellissoide
n_1, n_2, n_3	Versori degli assi del riferimento

Gli assi principali d'inerzia **NON** coincidono con gli assi di simmetria geometrica, come mostrato dalle figure delle pagine seguenti.



ASSI PRINCIPALI DEL "RATTLEBACK" CHE SI OSTINA A RUOTARE IN SENSO ORARIO



VISTA SUI DUE LATI DI ALCUNI “RATTLEBACKS” DI A.D. MOORE