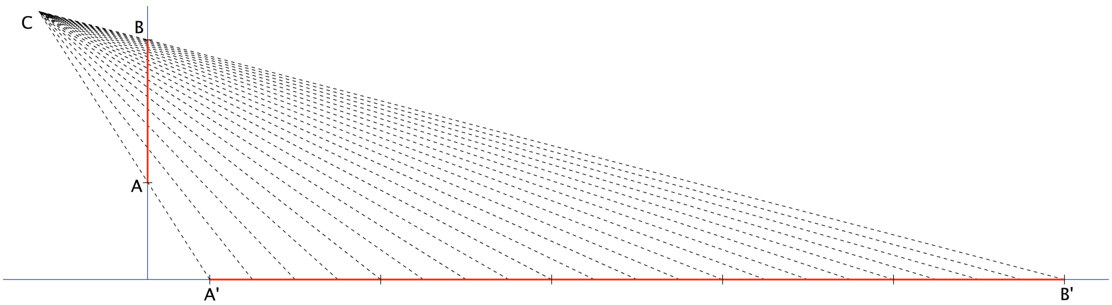
L'infinito in matematica: concetto ragionevole o paradossale?

Claudio GIORGI

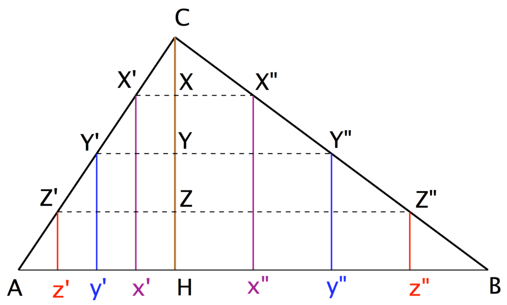
Per cominciare dobbiamo domandarci: perché l'infinito riemerge continuamente nel discorso matematico, e che ruolo ha? Parlare dell'infinito in matematica ad un pubblico che non è familiare con il linguaggio ed il formalismo matematico è impresa assai difficile. Tuttavia, sforzandoci di superare l'iniziale obiezione "questo non fa per me", vale la pena di accettare la sfida di queste domande per poter finalmente scoprire la profonda *umanità* della matematica.
Spesso, anche per colpa di come viene insegnata, essa è identificata con un insieme di regole "costringenti", applicate senza fantasia (attraverso aridi calcoli numerici, operazioni obbligate, etc...). In altre parole, viene pensata come un luogo in cui la libertà personale non ha cittadinanza, anzi deve auto-sospendersi per non "alterare" l'oggettività della formula. Ebbene, la dimensione paradossale dell'infinto si colloca proprio a questo punto, come una sfida tra "regola" e libertà". Paradossale, infatti, non significa assurdo, irragionevole, ma indica qualcosa di ragionevole che però si colloca oltre l'orizzonte del senso comune. Qualcosa, insomma, che stimola la libertà della ragione ad andare oltre la regola.
Iniziamo con una brevissima introduzione storica del concetto di infinito (si veda P.Zellini, *Breve storia dell'infinito*, Adelphi, 1980). E per comprendere bene la questione va detto che il concetto di infinito, nel senso in cui se ne parla comunemente oggi, è maturato molto lentamente nel corso della storia. All'inizio della riflessione filosofica, esso non fu oggetto specifico di dibattito, ma venne utilizzato con significati diversi, soprattutto negativi. In particolare, per i Pitagorici solo ciò che è *finito* è perfetto in quanto compiuto, nel senso che non ha bisogno di nulla per la sua completezza; diversamente per l'infinito, che poiché *non ha fine* non sarà mai terminato, compiuto nella sua realtà.
Diversa la posizione di Melisso di Samo, che riporta il dibattito sulla possibilità dell'Infinito di rappresentare una qualità positiva dell'Essere. Con Anassagora e Democrito il concetto di infinito entra a pieno titolo nell'ambito della realtà fisica, nel primo come qualità relativa dell'essere, nel secondo come superamento del paradigma arcaico del cosmo come luogo finito. Entrambe le concezioni non ebbero un seguito immediato, ma riemergeranno nel pensiero moderno.
Nonostante le posizioni di Anassagora e di Democrito, il termine "infinito" mantenne per lungo tempo il suo significato negativo (infinito = non-finito, indefinito), In particolare Aristotele distingue fra i*nfinito in atto* (o "attuale") e *infinito in potenza* (o "potenziale"). Con l'espressione *infinito potenziale* egli intendeva la possibilità di aggiungere sempre qualcosa a una quantità determinata senza che ci sia mai un elemento ultimo, mentre l'*infinito attuale* era inteso come collezione infinita, compiutamente data, di tutti i punti di una grandezza geometrica. Secondo Aristotele:
"*il numero è infinito in potenza, ma non in atto ... Questo nostro discorso non intende sopprimere per nulla le ricerche dei matematici, per il fatto che esso esclude che l'infinito per accrescimento sia tale da poter essere percorso in atto. In realtà essi stessi allo stato presente non sentono il bisogno di infinito, ma di una quantità più grande quanto essi vogliono, ma pur sempre finita…*"
E fino a Dedekind e Cantor fu proprio così: i matematici hanno sempre preferito parlare di "infinito potenziale". Per esempio, la moderna definizione di limite "divergente all'infinito" (di una successione di numeri, per esempio) si basa proprio sul fatto che sia possibile "scavalcare" una grandezza fissata grande a piacere, ma

comunque finita. In questo approccio la dimensione paradossale dell'infinto si manifesta clamorosamente nelle serie numeriche. L'aggiunta ripetuta all'infinito di termini positivi sempre più piccoli può portare a due risultati completamente diversi: o ad una somma finita, come nel caso delle serie geometriche di ragione minore di 1 (vedi pannello 5.09), o ad una somma infinita, come nel caso della serie armonica (vedi exhibit "Un 'ponte'….verso l'infinito").
La concezione dell'infinito "in atto", invece, rimase a lungo relegata agli enti geometrici. Fin da Archimede era noto che i punti di una retta e di un segmento sono infiniti: infatti, dati due punti distinti, comunque vicini, ne esiste sempre un terzo compreso tra essi (proprietà archimedea). Inizialmente, però, non era affatto chiaro se e come tali punti potessero essere associati a insiemi numerici. Oggi siamo abituati ad associare ad ogni punto della retta un numero reale, ma anche i numeri razionali sono infiniti e godono della proprietà archimedea. Perché allora i numeri razionali non vanno bene? Sostanzialmente perché non sono "abbastanza numerosi e vicini" per rappresentare la "proprietà di continuità" che è propria dei punti di una retta. Come mostrato da Dedekind con il suo metodo delle sezioni, solo completando l'insieme dei razionali si ottiene l'insieme R, quello dei reali, che può essere ragionevolmente candidato a rappresentare i punti di una retta. L'assioma del continuo esprime infine l'ipotesi (accettata, ma non dimostrabile) che l'insieme dei reali sia il più piccolo insieme che consente questa rappresentazione.
[nota a piè pagina: Benché quelli noti ai più siano solo un paio (pi greco ed il numero di Nepero, *e*), i numeri reali non razionali sono enormemente più numerosi degli stessi razionali!]
Trattando insiemi geometrici continui, i paradossi legati alla loro natura infinita "in atto" si sono manifestati molto prima dell'opera di Hilbert, Dedekind e Cantor (vedi pannelli da 5.04 a 5.06). Se ci svincoliamo dagli insiemi numerici, infatti, è possibile (anticipando l'approccio moderno) introdurre il concetto secondo cui *gli insiemi infiniti non si contano, ma si 'corrispondono'*. Per esempio, i punti di un segmento AB corrispondono in modo biunivoco con i punti di un segmento A'B' cinque volte più lungo di AB (vedi fig.1). Addirittura, i punti di una retta - la cui lunghezza è ovviamente infinita - corrispondono in modo biunivoco ai punti di una semicirconferenza di raggio unitario, al cui lunghezza finita vale pi greco (vedi fig.2).

Questi paradossi prendono le mosse dalla 'regola' del buon senso secondo cui un insieme tanto più è 'grande' quanto più è 'numeroso'. Ma le precedenti considerazioni diventano 'ragionevoli' nel momento in cui si limita la 'regola' ai soli *insiemi finiti*, cioè dotati di un numero finito di elementi, mentre si ammette che per *insiemi infiniti* una parte possa essere numerosa come l'intero. Già Galileo ebbe a dire: "Ogni parte dell'infinito è infinita".

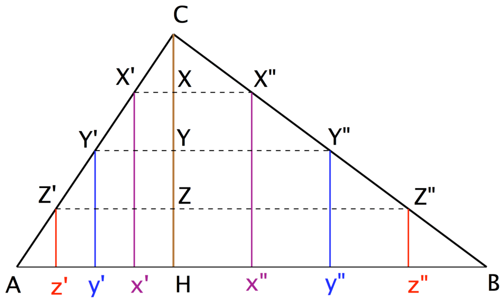


Da tutto ciò possiamo trarre la seguente conseguenza: che il concetto di misura di un ente geometrico, che ci permette di stabilire quanto esso è 'grande', non è correlata al numero di punti che lo costituisce. A tal proposito, consideriamo l'argomentazione usata da Bonaventura Cavalieri ne “Gli indivisibili lineari”. Egli traccia l’altezza CH di un triangolo scaleno ABC e confronta i due triangoli ACH e BCH (vedi fig.3).



Ciascuno di essi è formato da *infiniti segmenti verticali perfettamente uguali*. Infatti, basta considerare un qualsiasi punto X sull’altezza CH, mandare da esso la parallela ad AB fino ad incontrare gli altri due lati in X’ e X”, rispettivamente. I segmenti verticali uscenti da tali punti, detti x’ e x”, risultano ovviamente uguali. La stessa costruzione si può ripetere scegliendo punti diversi su CH, per esempio Y e Z, e costruendo i corrispondenti segmenti uguali, y’ e y”, z’ e z”. Alla fine si è dimostrato che ciascuno dei due triangoli, ACH e BCH, è formato dalla stessa quantità (infinita) di segmenti uguali: x’, y’, z’, …. il primo, e x”, y”, z” il secondo. Eppure i due triangoli non sono affatto uguali: hanno diversa forma, diversa lunghezza della base e, quindi, diversa area. In questo caso, la misura dei due triangoli non è correlata al numero di segmenti che li costituiscono.

Per concludere, occorre dare una risposta alla domanda iniziale, “perché l’infinito riemerge continuamente nel discorso matematico?”. La miglior risposta che conosco è stata formulata da E. De Giorgi:
“Il matematico si accorge per esempio che per riuscire a trattare alcuni problemi pratici occorre immergerli in un quadro ideale molto vasto. Un semplice esempio ci viene dall’aritmetica: nessun calcolo numerico utilizzerà numeri con un milione di cifre, in realtà tutti i calcoli si arrestano molto prima; tuttavia è impossibile fare una teoria dell’aritmetica semplice, pratica e coerente in cui non vale il teorema ‘esistono infiniti numeri primi’. La matematica è in un certo senso costretta a immergere la realtà finita e visibile in un quadro infinito sempre più esteso; l’ordine delle cose può essere concepito solo come un intreccio di relazioni tra enti materiali ed ideali che nel loro complesso formano una rete infinita”.
(Da Ennio De Giorgi, *Dizionario interdisciplinare scienza fede*, vol I, pp. 843-844)


C
X'
X
X"
Y'
Y
Y"
Z'
Z
Z"
A
z'
y'
x'
H
x"
y"
z"
B